Mathematik	Thema: Differentialrechnung	
Übungsaufgaben	Newtonsches Näherungsverfahren	12

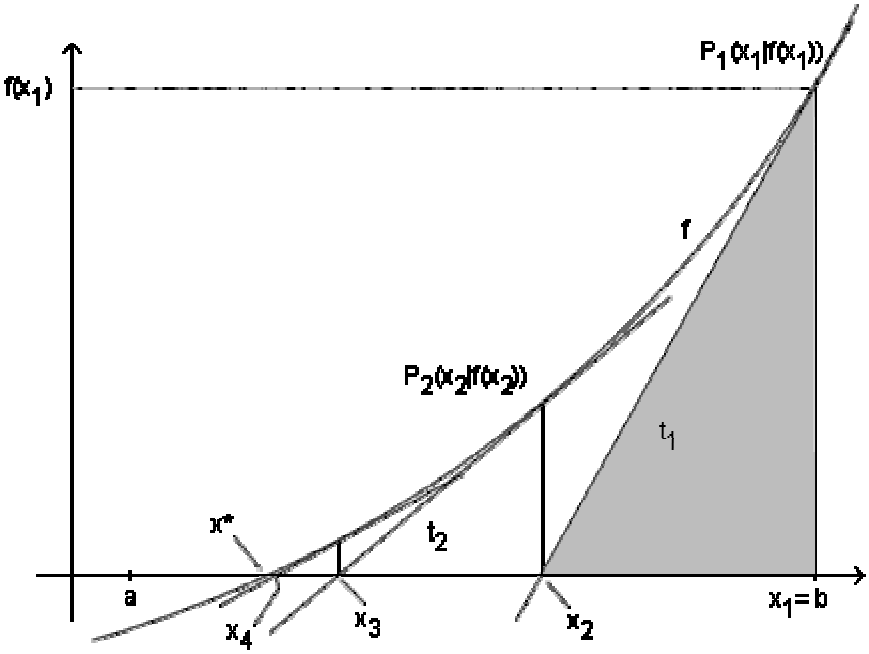
Nicht immer sind die zu bestimmenden Nullstellen von ganzrationalen Funktionen ganzzahlig, so dass man mit der Polynomdivision nicht sinnvoll arbeiten kann. Erst recht gilt dies, wenn man Nullstellen von gebrochen- oder nichtrationalen Funktionen sucht. Man muss die Nullstellen in diesem Fall näherungsweise bestimmen; ein elegantes und sehr effektives Verfahren hierzu ist das

Newtonsche Näherungsverfahren.

Man geht bei diesem Verfahren davon aus, dass ein Intervall [a;b] bekannt ist, in dem die gesuchte Nullstelle x* liegt. Man wählt nun eine geeignete Intervallgrenze als erste Näherung und damit als Startstelle x_1 für das Verfahren; im Beispiel ist es b.
Betrachtet man nun das grau unterlegte Steigungsdreieck, so ist die Steigung der darin enthaltenen Tangente t_1 gleich der Steigung des Graphen von f in P_1 und damit gilt:

$$m = f'(x_1).$$

Durch Umformen erhält man nun die gegenüber x_1 verbesserte Näherung x_2 .



$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - 0}{x_1 - x_2} = f'(x_1)$$

$$\Leftrightarrow f(x_1) = f'(x_1) \cdot (x_1 - x_2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = x_1 - x_2$$

$$\Leftrightarrow x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

x_2 ist dann die Startstelle für den nächsten Schritt.

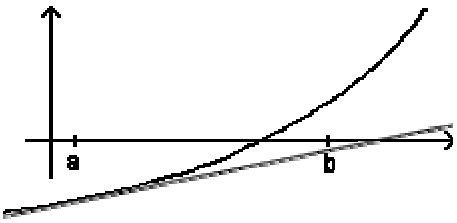
Allgemein gilt für den n-ten Schritt: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

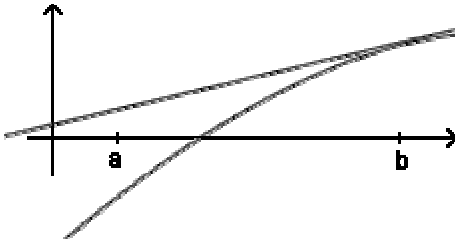
Bemerkung zum Begriff „geeignete Startstelle“:

In ungünstigen Fällen schneidet die Tangente t_1 die x-Achse außerhalb des Intervalls [a;b]. In den beiden nebenstehenden Fällen gilt aber jeweils

$$f(x_1) \cdot f''(x_1) < 0$$

Im oberen Bild ist der Graph linksgekrümmt und der Funktionswert der Startstelle ist kleiner als Null, im unteren Bild ist es umgekehrt.
Fast immer funktioniert das Verfahren auch dann, wenn man die weniger geeignete Startstelle wählt!!





Eine geeignete Startstelle sollte also die Bedingung erfüllen: **$f(x_1) \cdot f''(x_1) > 0$**