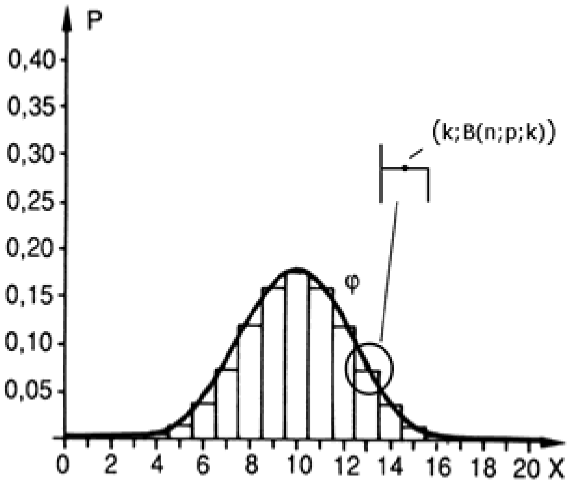
Mathematik	Thema: Stochastik	
Grundlagen	Binomialverteilung - Näherung	13 GK

Für relativ große n wird die Binomialverteilung immer symmetrischer. Die Punkte (k;B(n;p;k)) liegen näherungsweise auf dem Graphen einer Funktion des Typs

$$f(x)=a\cdot e^{k\cdot x^2} \quad ; k<0$$



Die Fläche eines Rechteckstreifens entspricht der zugehörigen binomialen Wahrscheinlichkeit, die Summe der Flächen aller Rechteckstreifen muss also 1 ergeben.

Für die Gaußfunktion (Glockenkurve)

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot x^2} \quad \text{gilt}$$

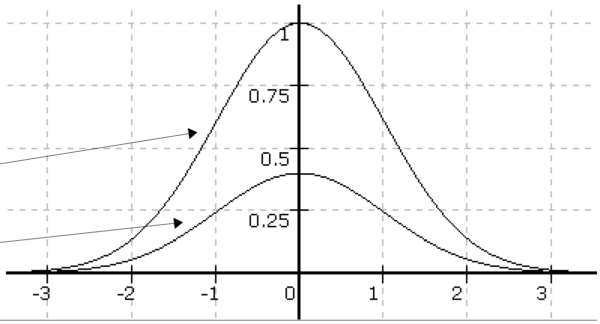
$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,dx=1 \quad ,$$

die Maßzahl der Fläche zwischen dem Graphen der Funktion und der x-Achse ist also 1 wie die Summe der Rechteckstreifen der Binomialverteilung.

Bild rechts:

$f(x)=e^{-\frac{1}{2}\cdot x^2}$ und

$\varphi(x)$



Um eine brauchbare Näherung für die B(n;p;k) zu erhalten, muss die Kurve noch

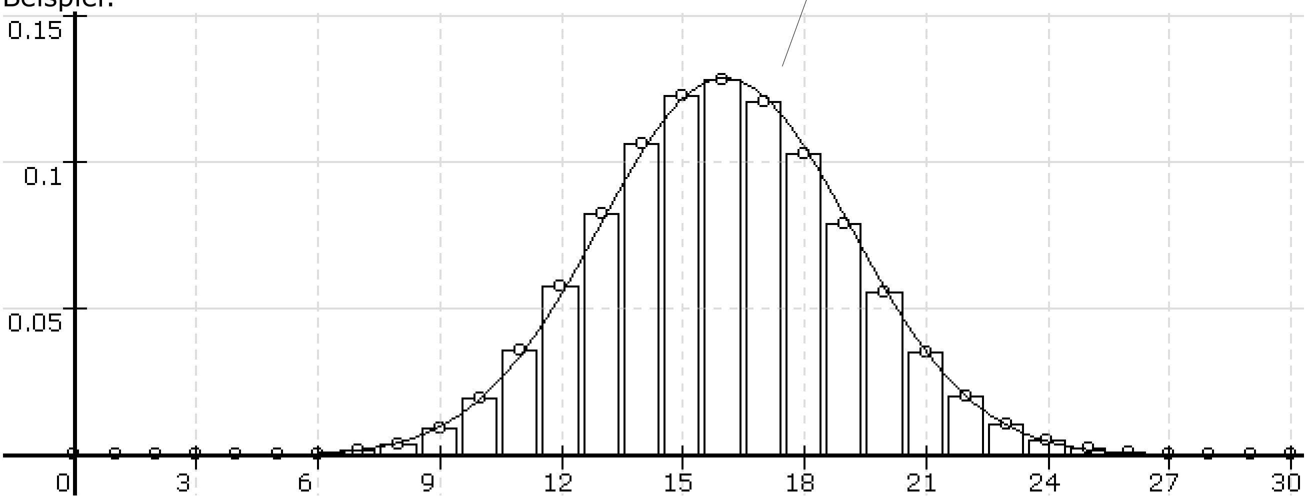
- nach rechts verschoben werden (mittels μ)
- in x-Richtung gespreizt (mittels σim Exponenten, um alle Balken zu überdecken) und
- in y-Richtung gestaucht werden (mittels σunter dem Bruchstrich, um wieder auf eine Fläche von 1 zwischen dem Graphen und der x-Achse zu kommen).

Ist die Laplace-Bedingung : n·p·q≥ 9 erfüllt,so erhält man:

$$B(n;p;k)\approx\frac{1}{\sigma\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Binomialverteilung zu
n=40 und p=0,4
Darüber liegt die Gaußfunktion
mit μ=16 und σ=3,1

Beispiel:



Für den Fall der erfüllten Laplace-Bedingung kann man die binomialen Wahrscheinlichkeiten näherungsweise berechnen:

$$P(x \le k) = F(n;p;k) \approx \Phi\left(\frac{k+0{,}5-n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}}\right) = \Phi\left(\frac{k+0{,}5-\mu}{\sigma}\right)$$

Hierbei ist

$$\Phi\left(\frac{k+0{,}5-\mu}{\sigma}\right) = \Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \varphi(x)\,dx \quad mit \; z = \frac{k+0{,}5-\mu}{\sigma}$$

wobei die Werte für die Φ(z) tabelliert sind.

Die Vorteile gegenüber dem Arbeiten mit den Tabellen zur Binomialverteilung:

- Keine Einschränkung in Bezug auf p
- Keine Einschränkung in Bezug auf n
- EINE Tabelle!

Anwendung der Näherung von de Moivre und Laplace:

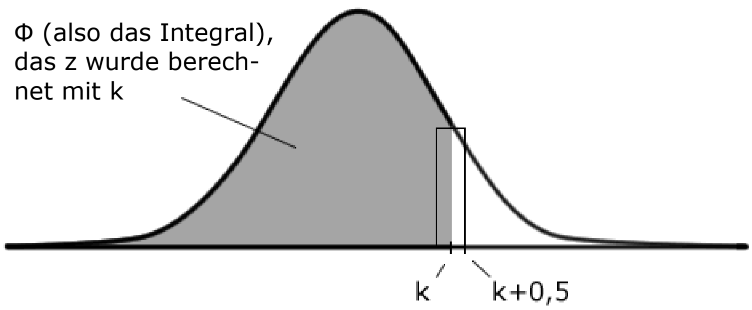
a) Berechnen sie den Ausdruck $z = \frac{k+0{,}5-\mu}{\sigma}$

b) Ist z>0, so schlagen sie in der Tabelle zur Normalverteilung den entsprechenden Tabellenwert Φ(z) nach.

c) Ist z < 0, so nutzen sie die Gleichung Φ(-z) = 1 - Φ(z)

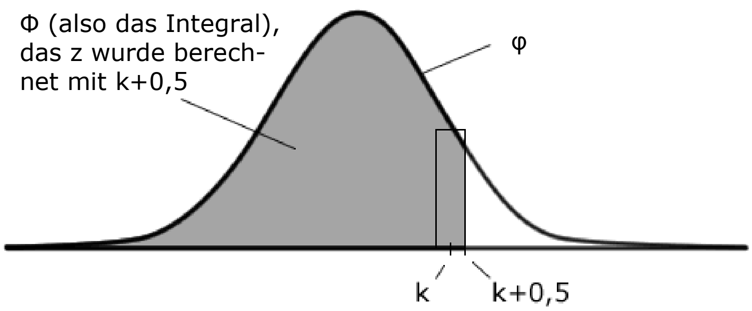
Erläuterung zur Korrektur k**<u>+0,5</u>** statt k:

Die Fläche der Rechteckstreifen bei der Binomialverteilung entspricht der binomialen Wahrscheinlichkeit. Für die Berechnung von $P(x \le k)$ sind also die Flächen der Rechteckstreifen zu summieren.



Diese Fläche lässt sich annähern durch die graue Fläche, also

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \varphi(x)\,dx \quad .$$



Der letzte Rechteckstreifen ist bei dieser einfachen Methode nur zur Hälfte berücksichtigt. Man reduziert den entstehenden Fehler, indem man das z nicht mit k, sondern (wie weiter oben beschrieben) mit k+0,5 berechnet. Hierdurch wird die rechte Hälfte des letzten Rechteckstreifens mit berücksichtigt. (Unteres Bild)

Überlegen sie sich einen Fall, für den der Fehler gravierend ist und einen Fall, für den sich der Fehler bei der Näherung ohne Korrektur gering ist!